Correction CT – TD 2

Mesures et incertitudes

I - Chiffres significatifs dans un résultat de mesurage

Grandeur	Valeur mesurée	Incertitude-type	Écriture
Distance L	742 310,1 m	777,32 m	$L = (7,4231\ ;\ 0,0078) \times 10^5$ m
Distance L	8231,34 m	3,449 m	$L = (8,2313\ ;\ 0,0034) \times 10^3$ m
Distance L	9,421 36 mm	4 µm	$L = (9,4214\ ;\ 0,0040) \times 10^{-3}$ m
Temps T	0,014 280 s	0,000 312 s	$T = (1,428\ ;\ 0,031) \times 10^{-2}$ s
Temps T	0,002 853 4 s	0,000 451 s	$T = (2,85\ ;\ 0,45) \times 10^{-3}$ s
Temps T	0,000 284 s	0,000 436 s	$T = (2,8\ ;\ 4,4) \times 10^{-4}$ s
Résistance R	1,108 76 mΩ	333 µΩ	$R = (1,11\ ;\ 0,33) \times 10^{-3}$ Ω
Résistance R	4,2032 MΩ	5,3 kΩ	$R = (4,2032\ ;\ 0,0053) \times 10^6$ Ω
Intensité I	45 A	0,32 kA	$I = (0,5\ ;\ 3,2) \times 10^2$ A
Intensité I	45 µA	4,4 mA	$I = (0,0\ ;\ 4,4) \times 10^{-3}$ A

II - Incertitudes de type A

1. $\boxed{\forall i,\ u(g_i) = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\sqrt{\sum_{k=0}^{n-1}(g_k - \bar{g})^2}} = 0{,}071\,110\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
2. $\boxed{u(\bar{g}) = \frac{u(g_i)}{\sqrt{6}}} = 0{,}029\,031\ \mathrm{m\,s^{-2}}$
3. C'est la moyenne des valeurs de g : $\boxed{\bar{g} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} g_i}{n}} = 9{,}801\,67\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.
4. On arrondit $u(\bar{g})$ à deux chiffres, d'où $u(\bar{g}) = 0{,}029\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Le dernier chiffre porte sur les millièmes de $\mathrm{m\,s^{-2}}$. On arrondit $\bar{g}$ pour que le dernier chiffre de son écriture porte sur les millièmes de $\mathrm{m\,s^{-2}}$, d'où $\bar{g} = 9{,}802\ \mathrm{m\,s^{-2}}$. Finalement :
$$\boxed{g = (9,802\ ;\ 0,029)\ \ \mathrm{m\,s^{-2}}}$$
5. On calcule le z-score $\boxed{Z(\bar{g}, g_{ref}) = \frac{|\bar{g} - g_{ref}|}{u(\bar{g})}} = 0,287 < 2$. Les mesures sont compatibles avec la valeur de référence.

III - Cas gaussien

1. On a $\boxed{u(\bar{r}) = \sqrt{V}} = \sqrt{72{,}25 \times 10^{-12}\ \mathrm{fm}^2} = \sqrt{72,25} \times \sqrt{10^{-12}}\ \mathrm{fm} = 8{,}5 \times 10^{-6}\ \mathrm{fm}$.
2. Pour $n = 100$ mesures, on a 99 degrés de liberté, et on lit dans la table de Student le facteur d'élargissement associé à un niveau de confiance de 95 % $k = 1,96$.
3. On a $\boxed{\Delta\bar{r} = ku(\bar{r})} = 1{,}666 \times 10^{-5}$ fm associée à un niveau de confiance de 95 %.
4. On arrondit $u(\bar{r})$ à deux chiffres, d'où $u(\bar{r}) = 17 \times 10^{-6}$ fm. On écrit $\bar{r}$ dans la même puissance de 10 et avec la même unité, d'où $\bar{r} = 833\,152{,}6 \times 10^{-6}$ fm puis on arrondit pour que le dernier chiffre soit dans la même position numérale que le « 7 » de 17×10^{-6} fm, d'où $\bar{r} = 833\,153 \times 10^{-6}$ fm. Finalement :
$$\boxed{r = (833\,153\ ;\ 17) \times 10^{-6}\ \mathrm{fm}}$$

IV - Incertitudes de type B

Pour la valeur affichée, la gamme est 5,0000 kΩ (plus petite valeur strictement supérieure à celle affichée). Et la précision est donc 0,07 % + 2 dgts, c'est-à-dire 0,07 % de la valeur affichée plus 2 fois la valeur qu'aurait le chiffre 1 placé en dernière position sur l'afficheur. La dernière position est celle des dixièmes de ohm, donc 1 digit vaut $1 \times 10^{-1}\,\Omega$ et on a donc la précision $p = \frac{0{,}07}{100} \times 941{,}6\,\Omega + 2 \times 1 \times 10^{-1}\,\Omega = 0{,}859\,12\,\Omega$.
La précision est égale à la demi-étendue et on a donc, dans un modèle rectangulaire, en notant R la résistance mesurée : $\boxed{u(R) = \dfrac{p}{\sqrt{3}}} = 0{,}4960\,\Omega$. On arrondit à deux chiffres : $u(R) = 0{,}50\,\Omega$. On adapte en conséquence l'écriture de la valeur mesurée : 941,60 Ω. Et finalement, le résultat du mesurage s'écrit :

$$\boxed{R = (941,60\ ;\ 0,50)\ \Omega}$$

V - Incertitudes composées

1. L'étendue est égale la résolution de l'appareil de mesure, ici une graduation, c'est-à-dire un millimètre. C'est le cas pour les deux grandeurs x_1 et x_2. On a donc $\boxed{u(x_1) = u(x_2) = \dfrac{1 \text{ graduation}}{2\sqrt{3}}}$
2. On a $d = x_2 - x_1$ donc $u(d) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_1)^2} = \sqrt{2}\frac{1 \text{ graduation}}{2\sqrt{3}}$, d'où $\boxed{u(d) = \dfrac{1 \text{ graduation}}{\sqrt{6}}}$.
3. $u(x_1) = u(x_2) = \frac{1\,\text{mm}}{2\sqrt{3}} = 0{,}288\,68\,\text{mm}$. $u(d) = \frac{1\,\text{mm}}{\sqrt{6}} = 0{,}408\,25\,\text{mm}$. On constate que l'incertitude-type sur d est largement inférieure à un millimètre qui est pourtant la résolution de l'appareil utilisé. On retient :
   (a) l'incertitude-type est le résultat d'un calcul de probabilité selon un modèle (ici la distribution uniforme ou rectangulaire) qui n'est pas intuitif ;
   (b) les incertitudes-types sur les deux grandeurs mesurées ont des effets qui peuvent statistiquement se compenser ;
   (c) il faut faire les calculs d'incertitudes pour obtenir une description rigoureuse du mesurage.
4. La valeur mesurée est $\bar{d} = x_2 - x_1 = 3{,}9\,\text{mm}$. On écrit donc : $\boxed{d = (3,90\ ;\ 0,41)\ \text{mm}}$. On remarque que $\bar{d}$ s'écrit avec un chiffre significatif supplémentaire (un zéro à droite). Cela est due à l'incertitude-type composée qui nous indique quels sont les nombres significatifs dans le résultat d'un mesurage. Là encore, ce n'est pas intuitif et seule une application rigoureuse des règles d'écriture permet de conclure.